METODOS NO-VARIACIONALES

Usando el teorema de la función inversa - ver [1]

1. Queremos probar que para $f \in L^2(U)$ con $\|f\|_2$ suficientemente chico, existe una única solución $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ de la ecuación

$$\begin{aligned} -\Delta u + \sin(u) = f \quad & \text{en } U, \\ u = 0 \quad & \text{sobre } \partial U. \end{aligned}$$

   Consideramos $X := H^2(U) \cap H_0^1(U)$, $Y := L^2(U)$ y $L : X \to Y$ definida por $Lu = -\Delta u + \sin(u)$.

   a) Verificar que $L \in C^1(X, Y)$ con $DL(u)v = -\Delta v + \cos(u)v$.
   b) Probar que $L(0) = 0$ y que $DL(0) : X \to Y$ es invertible.
   c) Concluir.

2. Consideramos ahora el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^3 = f \quad & \text{en } U, \\ u = 0 \quad & \text{sobre } \partial U. \end{aligned}$$

   a) Si intentamos tratar este problema con $f \in C(\bar{U})$ en el mismo marco funcional que en el problema anterior, ¿que restricción debemos imponer sobre n?
   b) Tomamos $X := W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U)$, $Y := L^p(U)$ y $L : X \to Y$ definida por $Lu = -\Delta u + u^3$ con $p > 1$. Probar que L esta bien definida para $p > 1$ si $n \leq 3$ y $p \geq n/3$ si $n \geq 4$.
   c) Concluir como en el ejercicio anterior.

Punto fijo

1. (ver [2]) Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u + b(Du) = f & \text{en } U, \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz. Usar el Teorema de punto fijo de Banach para mostrar que existe una única solución débil $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ si la constante de Lipschitz $\mathrm{Lip}(b)$ es suficientemente pequeña.

2. (ver [3]) Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado suave y $f \in C(\mathbb{R})$ es acotada. Queremos probar que esta ecuación tiene una solución débil u usando el teorema de punto fijo de Schauder.

   a) Verificar que para toda $u \in L^2(U)$, la ecuación $\Delta v = f(u)$ tiene una única solución débil $v \in H_0^1(U)$ y que además

   $$\|v\|_{H_0^1(U)} \leq C\|f(u)\|_2 \leq M$$

   para algún $M > 0$.

   b) Verificar que la aplicación $T : u \in L^2(U) \to v \in L^2(U)$ es continua.

   c) Probar que el conjunto $C = \{u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq M\}$ es convexo y compacto en $L^2(U)$ y verifica $T(C) \subset C$.
   Sug: verificar que es relativamente compacto y cerrado en $L^2(U)$.

   d) Concluir.

3. Consideramos la ecuación (ver [4])

$$\begin{cases} \Delta_p u = f(x, u) & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado suave, $p > 2$, $\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el operador p-laplaciano (ver práctica anterior), y $f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory tal que

$$|f(x, s)| \leq a(x) + C|s|^{q-1} \quad \text{con } a \in L^{q'}(U)$$

para algún $q \in (1, p)$. Queremos probar que esta ecuación tiene una solución usando el teorema de punto fijo de Schaefer.

a) Verificar que para todo $v \in L^{q'}(U)$ existe una única solución $u \in W_0^{1,p}(U)$ de

$$\begin{cases} \Delta_p u = v & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$$

y que

$$\|u\| \leq C\|v\|_{q'}^{\frac{1}{p-1}} \qquad \text{donde } \|u\| := \|u\|_{W_0^{1,p}(U)}.$$

Notamos $T : v \in L^{q'}(U) \to u \in W_0^{1,p}(U)$.

b) Admitiendo que vale

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y) \geq C|x-y|^p \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

probar que T es continua.

c) Definimos

$$A = i \circ T \circ \tilde{f} : L^q(U) \to L^q(U)$$

donde

$$i : W_0^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U) \quad \text{y} \quad \tilde{f} : u \in L^q(U) \to f(.u(.)) \in L^{q'}(U).$$

Verificar que A es continua y compacta.

d) Aplicar el teorema de Schaefer con A (falta verificar la estimación a priori).

Sub- y super-soluciones

FALTA

Método de monotonía: el teorema de Minty-Browder - ver [5]

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y coerciva (es decir que $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)x}{|x|} = +\infty$). Probar que para todo $g \in \mathbb{R}^n$ la ecuación $f(x) = g$ tiene solución (aplicar el lema visto en la clase sobre el método de monotonía).

El propósito del ejercicio es extender este resultado a la dimensión infinita suponiendo T monótona (teo de Minty-Browder). Mas precisamente consideramos un espacio de Banach real separable reflexivo X y una función $T : X \to X'$ tal que

(H1) la imagen por T de cualquier conjunto acotado de X es un conjunto acotado en X',

(H2) T es continua (fuertemente): si $\|u_n - u\|_X \to 0$ entonces $\|T(u_n) - T(u)\|_{X'} \to 0$,

(H3) T es coerciva:

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{(T(u), u)_{X',X}}{|u|} = +\infty,$$

(H4) T es monótona:

$$(T(u) - T(v), u - v) \geq 0 \quad \text{para todo } u, v \in X.$$

Vamos a probar que para cualquier $g \in X'$ la ecuación

$$T(u) = g$$

tiene solución.

La prueba, similar a la vista en la clase, consiste en aproximar este problema por problemas finito-dimensionales (método de Galerkin).

1. Sea $(x_n)_{n\geq1}$ tal que $< x_1, x_2, ... >$ es denso en X y $X_n :=< x_1, .., x_n >$. Notamos $g_n = g_{|X_n} \in X'_n$ y $T_n : X_n \to X'_n$ definida por $T_n(u) = T(u)_{|X_n}$. Verificar que existe $u_n \in X_n$ tal que $T_n(u_n) = g_n$ para todo $n \geq 1$.

2. Probar que las sucesiones $(u_n)_{n\geq1}$ y $(T(u_n))_{n\geq1}$ son acotadas en X y X' respectivamente.

3. Deducir que existen $u \in X$ y $\tilde{g} \in X'$ tales que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en } X,$$
$$T(u_n) \rightharpoonup \tilde{g} \quad \text{en } X',$$

   para alguna subsucesión (pensar en el teorema de Banach-Alaoglu para $(T(u_n))$).

4. Probar que $\tilde{g} = g$, $(T(u_n), u_n) \to (g, u)$ y que

$$(g - T(v), u - v) \geq 0 \quad \text{para todo } v \in X.$$

5. Escribiendo v de la forma $v = u + tw$ con $t \in \mathbb{R}$ y $w \in V$, deducir que $T(u) = g$.

Nota: vimos que $T(u) = g$ ssi $u \in H_v := \{w \in X, (g - T(v), w - v) \geq 0\}$ para todo $v \in X$. Como los H_v son cerrados y convexos obtenemos que el conjunto de soluciones de la ecuación $T(u) = g$ es cerrado y convexo.

APLICACION: en una abierto acotado suave $U \subset \mathbb{R}^n$ consideramos una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} T(u) := -\sum_{i=1}^{n} \partial_i(a_i(x,u,\nabla u)) + a_0(x,u,\nabla u) = f \quad &\text{en } U, \\ u = 0 \quad &\text{en } \partial U, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $f \in W^{1,q}(U)'$ para algun $q \in (1,+\infty)$ y las funciones
$a_j : (x,z,p) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to a_j(x,z,p) \in \mathbb{R}$, $j = 0,1,..,n$, verifican las siguientes condiciones:

(H1') (regularidad) a_j es medible en x para todo (z,p), y continua en (z,p) para ctp $x \in U$,

(H2') (monotonía) para ctp $x \in U$, y para todo $(z,p),(z',p')$,

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(x,z,p) - a_i(x,z',p')\Big)(p_i - p_i') + \Big(a_0(x,z,p) - a_0(x,z',p')\Big)(z - z') \geq 0,$$

(H3') (coercividad) existen $C > 0$ y $h \in L^1(U)$ tal que para todo (x,z,p),

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,z,p)p_i + a_0(x,z,p)z \geq C(|z|^q + |p|^q) - h(x),$$

(H4') (crecimiento) existen $c > 0$ y $g \in L^{q'}(U)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x,z,p)| + |a_0(x,z,p)| \leq C(|z|^{q-1} + |p|^{q-1}) + g(x),$$

Notamos $X := W_0^{1,q}(U)$. Definimos $T : X \to X'$ por

$$(T(u),v) = \sum_{i=1}^{n} \int_U a_i(x,u,\nabla u)\partial_i v\,dx + \int_U a_0(x,u,\nabla u)v\,dx.$$

Verificar que T esta bien definido y verifica (H1)-(H4). Deducir que existe $u \in X$ tal que $T(u) = f$.
EJEMPLO: verificar que

$$T(u) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i\Big(|\partial_i u|^{p-2}\partial_i u\Big) + |u|^{p-2}u,$$

con $p \in (1,+\infty)$, cumple estas hipotesis (la suma es el pseudo-p-Laplaciano).

Referencias

[1] F. Bethuel, notas de clase - disponible a
`http://www.ljll.math.upmc.fr/mbio/cours/bethuel.php`

[2] L.C. Evans, Partial differential equations.

[3] H. Le Dret, notas de clase,

`http://www.ann.jussieu.fr/~ledret/M2Elliptique.html`

[4] G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin, Variational and topological methods for Dirichlet prolems with p-Laplacian, Portugaliae Mathematica, 58, 2001.

[5] M. Renardy, R.C. Rogers, An introduction to PDE, Texts in applied mathematics 13, Springer.